Даннная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по статфизике
Мостовому Сергею Дмитриевичу

Первая пара в понедельник. Студенты прикорнули.
Мостовой: Чего расслабились? А если свет включить, это вам помешает?

30. Вывести цепочку уравнений Боголюбова для кинетических функций распределения из уравнения Лиувилля.

Ранее у нас было

$$F(t,\vec{r}_1,\vec{p}_1) = N \int\ldots\int w(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N, \vec{p}_1 \ldots \vec{p}_N)\, d^3\vec{r}_2 \ldots d^3\vec{r}_N\, d^3\vec{p}_2 \ldots d^3\vec{p}_N$$

Для кин ур-я Боголюбова заменим N на V:

$$F_1(t,\vec{r}_1,\vec{p}_1) = V \int\int w(\vec{r}_1 \ldots \vec{p}_N)\, d^3\vec{r}_2 \ldots d^3\vec{r}_N\, d^3\vec{p}_2 \ldots d^3\vec{p}_N$$

чтобы не путать с F

Также $F_2(t,\vec{r}_1,\vec{p}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_2) = V^2 \int\ldots\int d^3\vec{r}_3 \ldots d^3\vec{r}_N\, d^3\vec{p}_3 \ldots d^3\vec{p}_N$

Это у нас уже было в конце 7-го семинара - в теме "неидеальный газ". Но тут у нас более общий случай, с зависимостью от импульсов и времени.

Зачем нужны $F_1(t,\vec{r}_1,\vec{p}_1)$, $F_2(t,\vec{r}_1,\vec{p}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_2)$ и т.д?

До ~~этого~~ мы моделировали газ „шариками" с законами Ньютона. 10^{23} шариков запрогать нереально, обычно прогают 10^7. А тут вместо 10^{23} шариков с 6 массивами проекций $\vec{r}$ и $\vec{p}$ - всего лишь несколько кор. функций, откуда можем вытащить всё 😊

Но как их найти? Цепочка уравнений Боголюбова.

$\boxed{\text{Вывод:}}$

Используем факт из Гамильтоновой механики: $\frac{\partial w}{\partial t} = \{H, w\}$

Подставляем туда $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(r_i) + \sum_{i<j} \Phi(r_i - r_j)$

и получаем $\frac{\partial w}{\partial t} = \{H, w\} = \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial r_k} \frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{p_k}{m} \frac{\partial w}{\partial r_k} \right) + \sum_{i \neq k} \frac{\partial \Phi_{ki}}{\partial r_k} \frac{\partial w}{\partial p_k}$

Проинтегрируем $\int d^3 \vec{r}_2 \ldots d^3 \vec{r}_N \, d^3 \vec{p}_2 \ldots d^3 \vec{p}_N$

Получим $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{p_1}{m} \frac{\partial F_1}{\partial r_1} + 0 + \sum_{j=1} \int \frac{\partial \Phi_{1j}}{\partial r_1} \frac{\partial w}{\partial p_1} d^3 r_1 \, d^3 p_j \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\frac{F_2}{V} \right) + 0 = 0$

Некоторые слагаемые занулились. Например, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial w}{\partial r} dr = w(+\infty) - w(-\infty) = 0 - 0 = 0$

Осталось

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{p_1}{m} \frac{\partial F}{\partial r_1} - \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial F}{\partial p_1} = \left(\frac{N-1}{V} \right) \int \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial r_1} \frac{\partial F_2}{\partial p_1} d^3 \vec{r}_2 \, d^3 \vec{p}_2$$

В пределе $N \to \infty$ $\to \frac{1}{v}$, v – удельный объём (на 1 частицу)

Вот мы и получили ур-е связывающее F_1 и F_2.
(оно было в 7-м семестре тоже, здесь более общий случай)

Подобная цепочка уравнений Боголюбова была и в 7-м семестре.

19. Записать кинетическое уравнение Больцмана в пространственно однородном приближении. Охарактеризовать физические ограничения, необходимые для построения интеграла столкновений в системах типа газа с короткодействием (отсутствие тройных и массовый характер парных столкновений, подход Боголюбова к описанию кинетической эволюции системы).

32. Дать качественный вывод кинетического уравнения Больцмана для пространственно однородного газа с короткодействием (без использования цепочки Боголюбова).

Не один я эти вопросы объединил – также сделал кто-то из прописывающих их на ВВХ. Они оба посвящены короткодействию взаимодействия, которое позволяет сделать вот такое вот приближение:

Рассмотрим ещё один результат Боголюбова.

Пусть у нас разреженный газ нейтральных частиц.

$\Downarrow$ считать F_3, F_4 и т.д. не нужно. Достаточно F_2

$\Downarrow$ нет дальнодействующего кулоновского взаимодействия.

$$\begin{cases} \Phi_{ij} = 0, & |\bar{r}_i - r_j| > R \\ \Phi_{ij} = +\infty, & |\bar{r}_i - r_j| < R \end{cases}$$

Также Н.Н. Боголюбов сделал ещё одно допущение: F_2, F_3, F_4 и т.д. зависят от t только через $F_1(t)$. Тогда академику Боголюбову удалось подсчитать вот такой интеграл столкновений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v} \int (f' f_1' - f f_1) u \, d\omega \, d\boldsymbol{p}_1,$$

где $u = |\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}|/m$, $d\omega = a \, da \, d\varphi$, $f = F_1(t, \boldsymbol{p})$, f', f_1, f_1' получаются из f заменой $\boldsymbol{p}$ на $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_1'$ соответственно, а $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1'$ выражаются через $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1$ и параметры рассеяния a, φ с помощью формул механики

Такой чисто кинематический интеграл столкновений ☺ u – относительная скорость.

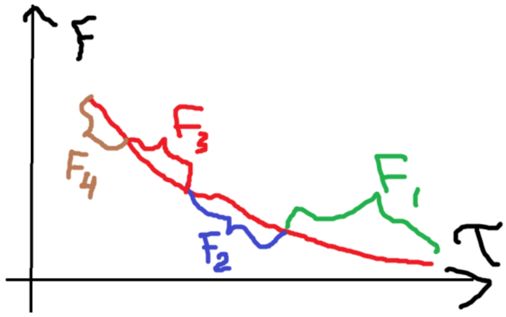
Полученный результат называется кинетическим уравнением Больцмана. Всё правильно – получил Боголюбов, а уравнение в честь Больцмана. Классиков надо уважать и читать (С) Иванова Инна Борисовна.

Я напомню, что у нас уже был интеграл столкновений - $-\frac{F(t)-F_0}{\tau}$. Но он был написан эмпирически и работает не очень. А вот больцмановский (при выполнении условий – короткодействии и запрету на трёх- и более частичные столкновения (что равносильно низкой концентрации) – лучше.

34. Линеаризуя интеграл столкновений Больцмана, показать, что характерное время релаксации к состоянию равновесия определяется наименьшим положительным собственным значением соответствующего оператора.

Ещё одно приближение заключается в разложении корреляционной функции по времени: $\boldsymbol{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \bar{\boldsymbol{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})(1 + \chi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}))$

и при этом считать $\chi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \ll 1$. Естественно, такое приближение лучше всего работает ближе к равновесию, где-то на зелёном этапе:



Подставляем $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \widetilde{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p})(1 + \chi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}))$ в больцмановский интеграл столкновений $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = \int (F'F'_1 - FF_1)u\, d\omega\, d\mathbf{p}_1$, получаем $\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int u\, d\omega\, d\mathbf{p}_1\, \widetilde{F}_1(\chi'_1 + \chi' - \chi_1 - \chi)$ - линеаризованное ур-е Больцмана.

Далее надо додуматься, что $\chi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ стоит представить в виде $\chi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = e^{-\nu t} h(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Подстановка в $\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int u\, d\omega\, d\mathbf{p}_1\, \widetilde{F}_1(\chi'_1 + \chi' - \chi_1 - \chi)$ даст окончательное интегральное уравнение

$$-\nu h = \int u\, d\omega\, d\mathbf{p}_1\, \widetilde{F}_1(h'_1 + h' - h_1 - h)$$

в котором величина $-\nu$ играет роль собственного значения интегрального оператора, стоящего справа (тривиальное решение $h = 0$, означающее $F = \widetilde{F}$, нас не интересует, а нетривиальное существует, как правило, не при всех значениях ν).

Далее Квасников показывает, что все возможные значения ν положительны (т.е. $\chi(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ убывает – что вполне естественно), а их спектр дискретный.

Общее решение уравнения для $\chi(t, \mathbf{p})$ представляется как суперпозиция

$$\chi(t, \mathbf{p}) = \sum_n C_n e^{-\nu_n t} h_n(\mathbf{p})$$

Что является достаточно интересным результат – убывание происходит по разным гармоникам. В случае, когда все гармоники быстро убывают, и лишь одна убывает достаточно медленно, мы можем приблизить решение, оставив лишь одну гармонику:

$$\frac{\partial F}{\partial t} \cong \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{F} + \widetilde{F} h e^{-t/\tau'}\right) = -\frac{\widetilde{F}}{\tau'} h e^{-t/\tau'} = -\frac{F - \widetilde{F}}{\tau'}$$

В этом случае мы и получим старый-добрый феноменологический интеграл столкновений:

$$\frac{\partial F(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{F - \widetilde{F}}{\tau'}$$